

Instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento*

Jeannete Aguilar-Martínez** y Luis Alvarez-Icaza***

Instituto de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 Coyoacán DF, México

Resumen En este artículo se describe el diseño una instalación experimental para estudiar el fenómeno de fricción entre llanta y pavimento. Se estudia el problema de la dinámica de la tracción y frenado a través de modelos dinámicos de fricción. Estos utilizan el modelo de LuGre (Canudas de Wit, C. *et al.*, 1995). Se presentan algoritmos de control para el movimiento del mismo y resultados de simulación.

Palabras clave fricción llanta-pavimento; modelos dinámicos de fricción; banco de pruebas.

1. Introducción

Los distintos estudios a propósito de la fricción llanta-pavimento han hecho énfasis en el uso de modelos pseudoestáticos. En particular, la llamada “fórmula mágica” (Bakker, E. *et al.*, 1987), es un modelo que reproduce el coeficiente de fricción contra el deslizamiento. Los modelos pseudoestáticos tienen limitaciones importantes: son difíciles de caracterizar y carecen de una base física. Por esta razón, se introdujeron los modelos dinámicos de fricción que se han usado para describir la fricción llanta-pavimento con mayor detalle. En este artículo se presenta el diseño de una instalación a pequeña escala para estudiar la interacción llanta-pavimento que permitirá estudiar con más detalle el uso de modelos dinámicos de fricción para control de tracción y frenado.

2. Modelo matemático de un cuarto de vehículo

La dinámica longitudinal de un vehículo utiliza un modelo de solo un cuarto de vehículo. Este tipo de modelo ha sido ya usado por otros autores como por ejemplo (Kiencke, U., 1993), (Kiencke, U. y Daiss, A., 1994), (Liu, Y. y Sun, J., 1995). Para describir el movimiento longitudinal de un cuarto de vehículo se utiliza el siguiente modelo

$$m\dot{v} = 4F_x - F_{ax} \quad (1)$$

* Investigación patrocinada por el proyecto CONACYT 47583 y el proyecto UNAM-PAPIIT IN117108

** Estudiante de posgrado, JAguilarM@iingen.unam.mx

*** Investigador y corresponsal, alvar@pumas.iingen.unam.mx

donde m es la masa del vehículo, v la velocidad longitudinal del vehículo, F_x la fuerza entre la llanta y el pavimento y F_{ax} la fuerza aerodinámica de arrastre, que puede escribirse como

$$F_{ax} = C_{ax}v^2 \quad (2)$$

donde C_{ax} es el coeficiente aerodinámico que depende del área longitudinal efectiva, la densidad del aire y la forma del vehículo. La fuerza de fricción llanta-pavimento puede expresarse de la siguiente manera

$$F_x = -\mu F_n \quad (3)$$

donde μ es el coeficiente de fricción llanta-pavimento y $F_n = \frac{mg}{4}$ es la fuerza normal en cada llanta. La dinámica rotacional de la llanta está descrita por

$$I_1 \dot{w}_1 = \tau_m - \tau_b - F_x R_1 \quad (4)$$

donde w_1 es la aceleración angular, I_1 es la inercia de la llanta, τ_m es el par de impulso, τ_b es el par de frenado y R_1 es el radio efectivo de la llanta. El banco estará constituido por un rodillo y una llanta. Se ha supuesto que el rodillo se comporte como el pavimento y que también represente la masa del vehículo. La llanta está acoplada al eje de un motor de corriente directa sin transmisión. El radio del rodillo está dado por R_2 , w_2 es la velocidad angular del rodillo e I_2 es la inercia del rodillo (ver Fig. 1). La dinámica rotacional del rodillo que está

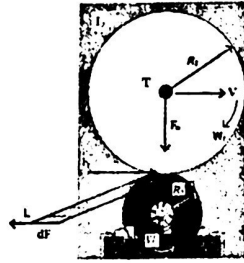


Figura 1. Diagrama del banco para estudiar la fricción llanta-pavimento.

dada por

$$I_2 \dot{w}_2 = F_x R_2 - F_{ax} R_2 \quad (5)$$

De las Ecs. (1) y (4) se puede establecer que la velocidad angular w_1 y la velocidad angular w_2 están relacionadas a través de la velocidad relativa definida como

$$s = R_2 w_2 - R_1 w_1 \quad (6)$$

Tomando la derivada de la Ec. (6) y al hacer $\tau = \tau_m - \tau_b$ se tiene la siguiente expresión

$$\dot{s} = R_2 \left[-\mu \frac{mg}{4} \frac{R_2}{I_2} - C_{ax} v^2 \frac{R_2}{R_2} \right] - R_1 \left[\frac{\tau}{I_1} + \mu \frac{mg}{4} \frac{R_1}{I_1} \right] \quad (7)$$

Al tomar las Ecs. (2) y (3) y sustituir en las Ec. (1), la dinámica del vehículo se puede expresar como

$$\dot{v} = -a\mu - bv^2 \quad (8)$$

$$\dot{s} = -(a+c)\mu - bv^2 - d\tau \quad (9)$$

donde $a = \frac{mg}{4} \frac{R_2^2}{I_2}$, $b = C_{ax} \frac{R_2^2}{I_2}$, $c = \frac{mg}{4} \frac{R_1^2}{I_1}$ y $d = \frac{R_1^2}{I_1}$.

3. Modelo dinámico de fricción

En (Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P., 1999) se proponen modelos dinámicos de fricción basados en el modelo de LuGre que se utilizan como base para este artículo. Este modelo supone que las superficies hacen contacto a través de cerdas erizadas elásticas y cuando se aplica una fuerza tangencial las cerdas se deforman como resortes, lo que hace que la fuerza de fricción aumente hasta llegar a un punto donde ocurre deslizamiento. El modelo está dado por

$$\frac{dz}{dt} = s - \frac{\sigma_0 |s|}{g(s)} z \quad (10)$$

$$\mu = \frac{F_x}{F_n} = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 s \quad (11)$$

donde s es la velocidad relativa entre las superficies (llanta-pavimento) y z es un estado interno que representa la deformación promedio de las cerdas. Los parámetros σ_0 , σ_1 y σ_2 representan respectivamente la rigidez, el amortiguamiento y la fricción viscosa entre las superficies y F_n es la fuerza normal. Para modelar y describir el fenómeno "Stribeck" ((Armstrong-Hélouvy, B., 1991) y (Canudas de Wit, C. *et al.*, 1995)) se utiliza la siguiente fórmula

$$g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-\left(\frac{s}{v_s}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

donde μ_c es la fuerza de Coulomb, μ_s es el nivel de la fuerza de fricción estática y v_s es la velocidad "Stribeck". El modelo representado en las Ecs. (10), (11) y (12) es un modelo con parámetros concentrados y tiene como hipótesis que la interfase llanta-pavimento es puntual.

4. Modelo dinámico del motor de corriente directa y del sistema electro-mecánico

Las ecuaciones que caracterizan al modelo matemático de un motor de corriente directa son las de del circuito eléctrico y equilibrio de pares, respectivamente

$$V_e = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + K_f \omega_1$$

$$J_{eq}\dot{\omega}_1 = K_m i_a - \tau_b$$

Donde V_e es el voltaje de entrada, L la inductancia eléctrica, R la resistencia eléctrica, i_a la corriente de armadura, τ_b el par de frenado, ω_1 la velocidad angular del eje del motor, J_{eq} el momento de inercia equivalente, y K_m , K_f constantes apropiadas. Para obtener el modelo dinámico del sistema completo se recurre a la Fig. 2 que muestra el sistema electro-mecánico. Partiendo del modelo estándar

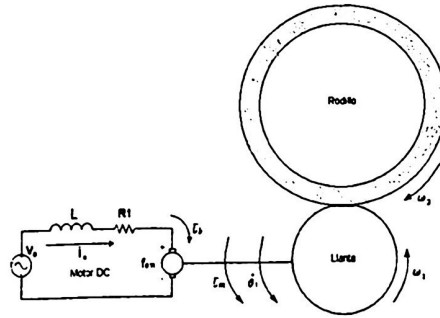


Figura 2. Sistema electro-mecánico.

del motor de corriente directa, se obtiene

$$L \frac{d}{dt} i_a = -R i_a - K_f \omega_1 + V_e \quad (13)$$

Sustituyendo la Ec. (3) y el par de frenado en la Ec. (4), se tiene

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \tau_m - B \omega_1 + \mu \frac{mg}{4} R_1 \quad (14)$$

y sustituyendo las Ecs. (2) y (3) en la dinámica rotacional del rodillo se obtiene

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \mu \frac{mg}{4} R_2 - C_{ax} v^2 R_2 \quad (15)$$

En este modelo se considera $\mu = g(s) \operatorname{sgn}(s) + \sigma_2 s$, donde $g(s) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-|\frac{s}{v_s}|^{\frac{1}{2}}}$, esta última ecuación es una parametrización del efecto "Stribeck". Este nuevo modelo pretende capturar fenómenos de fricción a bajas velocidades, así como predecir fenómenos de histéresis.

5. Trayectorias deseadas

Para conseguir el control de tracción y frenado fue necesario fijar trayectorias de referencia a partir de la velocidad deseada v_d , puede expresarse como

$$v_d = R_2 \omega_{2d}$$

donde ω_{2d} es la velocidad angular deseada que se puede conocer a partir de v_d . Conociendo v_d y ω_{2d} y al usar la Ec. (5), se puede conocer el coeficiente de fricción deseado, dado por

$$\mu_d = -\frac{4}{R_2 m g} [I_2 \dot{\omega}_{2d} + C_{ax} v_d^2] \quad (16)$$

Si se asume que $\dot{z}$ es nula¹ de la Ec.(10), donde $z_d = \frac{g(s_d)}{\sigma_0} \text{sgn}(s_d)$, es el estado interno de equilibrio de la Ec. (11), entonces se deduce la velocidad relativa deseada s_d entre las superficies llanta-pavimento, dada por

$$s_d = \frac{1}{\sigma_2} \left[\left(-\frac{4}{R_2 m g} [I_2 \dot{\omega}_{2d} + C_{ax} v_d^2] \right) - \sigma_0 z_d \right] \quad (17)$$

Por lo tanto se puede conocer $\dot{\omega}_{1d}$ de la Ec. (6), quedando como

$$\dot{\omega}_{1d} = \frac{R_2}{R_1} \dot{\omega}_{2d} - \frac{1}{R_1} \dot{s}_d \quad (18)$$

De la Ec. (4) se puede deducir el torque del motor deseado τ_{md} en función de ω_{1d}

$$\tau_{md} = I_1 \dot{\omega}_{1d} + \mu_d \frac{m g_t R_1}{4 I_1}$$

y con ello la corriente deseada i_{ad} , expresada como

$$i_{ad} = \frac{\tau_{md}}{K_m} = \frac{1}{K_m} \left[I_1 \dot{\omega}_{1d} + \mu_d \frac{m g R_1}{4 I_1} \right] \quad (19)$$

Finalmente el voltaje deseado V_{ed} , se expresa como

$$V_{ed} = L \frac{d}{dt} i_{ad} + R i_{ad} + K_f \omega_{1d} \quad (20)$$

Una vez encontradas las trayectorias deseadas que logran que el frenado o tracción sea congruente se puede diseñar un controlador con el modelo dinámico.

¹ Lo que implica suponer que la dinámica de z es más rápida que la de s .

6. Ley de control para el sistema electro-mecánico

El objetivo principal del controlador es comprobar la estabilidad del seguimiento de las trayectorias para el sistema, para ello se utiliza teoría de Lyapunov. Se parte de la Ec. (15) rescrita como

$$\dot{\omega}_2 = \mu \frac{mgR_2}{4I_2} - \frac{C_{ax}}{I_2} R_2^2 \omega_2^2 \quad (21)$$

Al tomar la Ec. (14) y despejando $\dot{\omega}_1$, se tiene

$$\dot{\omega}_1 = \frac{K_m}{I_1} i_a - \frac{B}{I_1} \omega_1 - \mu \frac{mg}{4I_1} R_1 \quad (22)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, se puede obtener la derivada de la velocidad relativa, que es

$$\dot{s} = \mu \frac{mg}{4} \left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1} \right] + \frac{R_1}{I_1} [B\omega_1 - K_m i_a] - \frac{R_2}{I_2} C_{ax} R_2^2 \omega_2^2 \quad (23)$$

Por otro lado, al despejar la velocidad angular de la llanta, de la ecuación de la velocidad relativa, Ec. (6), ésta se puede escribir como

$$\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2 - \frac{1}{R_1} s \quad (24)$$

Al despejar de la Ec. (13) $\frac{d}{dt} i_a$, se tiene

$$\frac{d}{dt} i_a = -\frac{R}{L} i_a - \frac{K_f}{L} \left[\frac{R_1}{R_2} \omega_2 - \frac{1}{R_1} s \right] + \frac{V_e}{L} \quad (25)$$

Por lo tanto el sistema sobre el que se diseñará la ley de control está descrito por

$$\dot{\omega}_2 = C_1 \mu - C_2 \omega_2^2 \quad (26)$$

$$\dot{s} = C_3 \mu - C_4 \omega_2^2 + C_5 \omega_2 - C_6 s - C_7 i_a \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} i_a = -C_9 \omega_2 - C_8 i_a + C_{10} s + C_{11} V_e \quad (28)$$

donde $C_1 = \frac{mgR_2}{4I_2}$, $C_2 = \frac{C_{ax}}{I_2} R_2^2$, $C_3 = \frac{mg}{4} \left[\frac{R_2^2}{I_2} + \frac{R_1^2}{I_1} \right]$, $C_4 = \frac{R_2^3}{I_2} C_{ax}$, $C_5 = \frac{R_2}{I_1} B$, $C_6 = \frac{1}{I_1} B$, $C_7 = \frac{R_1}{I_1} K_m$, $C_8 = \frac{R}{L}$, $C_9 = \frac{K_f}{L} \left[\frac{R_1}{R_2} \right]$, $C_{10} = \frac{K_f}{L} \left[\frac{1}{R_1} \right]$ y $C_{11} = \frac{1}{L}$. Los errores de seguimiento para la velocidad angular ω_2 , velocidad relativa s y corriente i_a están definidos respectivamente como:

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{2d}, \quad \tilde{s} = s - s_d \quad \text{y} \quad \tilde{i}_a = i_a - i_{ad}$$

donde ω_{2d} , s_d y i_{ad} son los valores deseados para ω_2 , s e i_a .

De las Ecs. (25), (26) y (27) se obtiene la dinámica del error de seguimiento, que puede expresarse como

$$\dot{\omega}_2 = -C_1[\mu] - C_2\omega_2^2 - \dot{\omega}_{2d} \quad (29)$$

$$\dot{s} = -C_3[\mu] - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6s + C_7i_a - \dot{s}_d \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{i}_a = -C_8i_a - C_9\omega_2 + C_{10}s + C_{11}V_e - \frac{d}{dt}i_{ad} \quad (31)$$

Ahora μ depende únicamente de la velocidad relativa s . Para desarrollar la ley de control para el seguimiento de trayectorias del sistema propuesto se utiliza teoría de Lyapunov y la técnica de Backstepping. Se define primero

$$W_2 = \frac{1}{2}\gamma_2\tilde{s}^2 \quad (32)$$

Se inicia con la derivada de la Ec. (31) y se sustituye la Ec. (29) en ella para obtener

$$\dot{W}_2 = \gamma_2\tilde{s}[C_3\mu - C_4\omega_2^2 + C_5\omega_2 - C_6s - C_7i_a - \dot{s}_d] \quad (33)$$

Se utiliza Backstepping, por ello se asume que i_a actúa por ahora como control.

Por lo tanto, seleccionando i_a de la Ec. (32), la que se denotará como i'_a

$$i'_a = \frac{1}{C_7}[C_3\mu + C_4\omega_2^2 - C_5\omega_2 + C_6s + \dot{s}_d - f\tilde{s}] \quad (34)$$

que incluye un término de corrección de error $f\tilde{s}$.

Al sustituir la Ec. (33) en (32), se tiene

$$\dot{W}_2 = -\gamma_2 f \tilde{s}^2 \quad (35)$$

Entonces, $\tilde{s} = 0$, es un punto de equilibrio asintóticamente estable, por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{s} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s = \lim_{t \rightarrow \infty} s_d$$

Como en realidad i'_a no es el control, entonces se puede definir una variable de error $\tilde{z} = i_a - i'_a \rightarrow i_a = \tilde{z} + i'_a$ y derivando $\tilde{z}$ con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\tilde{z} = \frac{d}{dt}i_a - \frac{d}{dt}i'_a \quad (36)$$

Al sustituir $\frac{d}{dt}i_a$ y $\frac{d}{dt}i'_a$ en la Ec. (35), se tiene

$$\frac{d}{dt}\tilde{z} = -C_8i_a - C_9\omega_2 + C_{10}s + C_{11}V_e - \frac{d}{dt}i'_a \quad (37)$$

Por otro lado se define

$$W_c = W_2 + \frac{1}{2}\tilde{z}^2 \quad (38)$$

Derivando la Ec. (37), se obtiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 + \frac{d}{dt}\tilde{z} = \dot{W}_2 + \tilde{z}[-C_8(\tilde{z} + i'_a) - C_9\omega_2 + C_{10}s + C_{11}V_e - \frac{d}{dt}i'_a] \quad (39)$$

Se selecciona V_e de la Ec. (38), que es la variable de control, como

$$V_e = \frac{1}{C_{11}}[C_8 i'_a + C_9 \omega_2 - C_{10} s + \frac{d}{dt}i'_a - \beta \tilde{z}] \quad (40)$$

que incluye un término de error de corrección $\beta \tilde{z}$. Introduciendo la ecuación de el voltaje V_e en la Ec. (38), se tiene

$$\dot{W}_c = \dot{W}_2 - \beta \tilde{z}^2 - C_8 \tilde{z}^2 = -\gamma_2 f \tilde{s}_2 - (C_8 + \beta) \tilde{z}^2 \quad (41)$$

Lo que prueba que $\tilde{z} \rightarrow 0$, asintóticamente. Entonces $i_a = i'_a$.

Ahora se analiza la estabilidad de $\tilde{\omega}_2 = 0$, derivando la ecuación el error de la velocidad angular, se tiene

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_{2d} \quad (42)$$

sustituyendo $\dot{\omega}_{2d}$ en (28), se obtiene

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 = -C_1(\mu - \mu_d) - C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2 \quad (43)$$

donde $(\omega_2 + \omega_{2d}) > 0$, por diseño.

En la Ec. (42) el término $(\mu - \mu_d)$ es acotado y uniformemente continuo, por lo que no hay tiempo de escape finito pues $\mu - \mu_d$ es uniformemente continua, μ y μ_d son acotadas. Además $-C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2$ es Lipschitz en $\tilde{\omega}_2$. Para un tiempo suficientemente grande, se tiene que

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \approx -C_2(\omega_2 + \omega_{2d})\tilde{\omega}_2$$

entonces

$$\tilde{\omega}_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_2 \rightarrow \omega_{2d}$$

Así queda demostrado que se obtiene estabilidad asintótica para $\tilde{i}_a = 0$, $\tilde{s} = 0$ y $\tilde{\omega}_2 = 0$, con la ley de control propuesta V_e .

7. Resultados de las simulaciones

Los resultados describen el comportamiento del vehículo cuando éste realiza varias maniobras. Las simulaciones se realizan con base en el juego de parámetros propuesto en (Aguilar, J.G., 2008). La siguiente simulación muestra como señal de referencia (v_d), una función senoidal, el controlador tiene como objetivo seguir la trayectoria deseada durante todo el proceso.

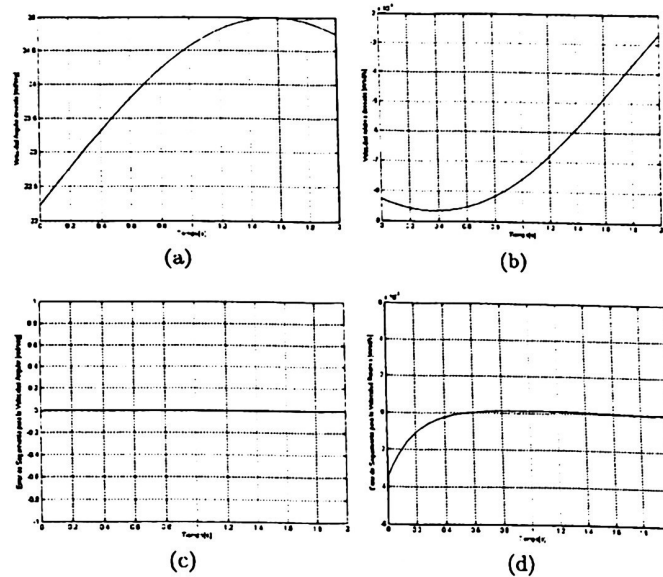


Figura 3. Resultados de simulación. a) Velocidad angular deseada ω_{2d} , b) Velocidad relativa deseada s_d , c) Error de seguimiento en la velocidad angular $\tilde{\omega}_2$, d) Error de seguimiento en la velocidad relativa $\tilde{s}$.

Las Figs. 3(a) y 3(c) muestran la velocidad angular deseada ω_{2d} y el error de seguimiento en la velocidad angular $\tilde{\omega}_2$, mientras que las Figs. 3(b) y 3(d) la velocidad relativa deseada s_d y el error de seguimiento en la velocidad relativa $\tilde{s}$.

La Fig. 4(a) muestra la corriente manipulada i'_a y la Fig. 4(b) el error de seguimiento en la corriente $\tilde{z}$.

8. Conclusiones

Se obtuvieron modelos matemáticos para la interacción llanta-pavimento en un modelo de un cuarto de vehículo, con los que se pueden diseñar leyes de tracción y frenado para poder controlar la velocidad relativa en la superficie de contacto. Se obtuvieron trayectorias deseadas basadas en el modelo dinámico del vehículo. Se diseñó una ley de control para el sistema electro-mecánico con base en técnicas de Lyapunov que resuelve el problema de control de seguimiento de trayectorias deseadas para un vehículo en regímenes de tracción y frenado. Finalmente, se presentaron los resultados de simulación que muestran un buen desempeño de los modelos dinámicos y del controlador.

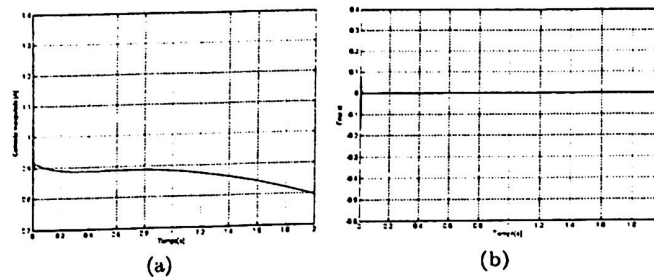


Figura 4. Resultados de simulación. a) Corriente deseada i'_a , b) Error de seguimiento en corriente z

Referencias

- Aguilar, J.G. (2008). Diseño de una instalación experimental para estudiar la interacción llanta-pavimento. Tesis de maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Armstrong-Hélouvry, B. (1991). *Control of machines with friction*. Kluwer Academic Publishers. USA.
- Bakker, E., Nyborg, L. y Pacejka, H. (1987). Tyre modeling for use in vehicle dynamic studies. *SAE p. Paper # 870421*.
- Canudas de Wit, C., Astrom, K.S. Olsson, K. y Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40(3), 419–425.
- Canudas de Wit, C. y Tsiotras, P. (1999). Dynamic tire friction models for vehicle traction control.. En: *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix Arizona USA*.
- Kiencke, U. (1993). Realtime estimation of adhesion characteristic between tyres and road. En: *Proceedings of the IFAC World Congress*. Vol. 1. pp. 15–18.
- Kiencke, U. y Daiss, A. (1994). Estimation of tyre friction for enhanced ABS-systems. En: *In Proceedings of the AVEG'94*.
- Liu, Y. y Sun, J. (1995). Target slip tracking using gain-scheduling for antilock braking systems. En: *In The American Control Conference, Seattle, Washington*. pp. 1178–82.